ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN ĐÌNH HUY

ĐỊNH LÝ VAN AUBEL VÀ ỨNG DỤNG TRONG VIỆC GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC DÀNH CHO HỌC SINH GIỎI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN ĐÌNH HUY

ĐỊNH LÝ VAN AUBEL VÀ ỨNG DỤNG TRONG VIỆC GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC DÀNH CHO HỌC SINH GIỎI

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS. TS. Trịnh Thanh Hải

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Danh sách hình vẽ

Mở đầu

Từ lâu hình học luôn được coi là một bộ môn được yêu thích bởi những khám phá mới mẻ từ những định luật, định lý và những ứng dụng đẹp của nó. Hình học là một phân môn quan trọng trong toán học đã gắn bó với tất cả chúng ta xuyên suốt quá trình học toán từ bậc Tiểu học đến Trung học phổ thông. Sự kì diệu của hình học thường tiềm ẩn những thử thách sâu sắc để thách thức trí tuệ của con người.

Trong các thành tựu của hình học thì định lý van Aubel là một định lý nổi tiếng và có nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán hình học hay và khó. Định lý được đặt theo tên nhà khoa học H. H. van Aubel, người đã công bố nó năm 1878. Định lý van Aubel có hai phát hiện trong lĩnh vực hình học phẳng đó là định lý van Aubel cho tứ giác và định lý van Aubel cho tam giác. Định lý van Aubel về tứ giác nói về mối quan hệ của các hình vuông cùng vẽ ra ngoài hoặc cùng vẽ vào trong của một tứ giác. Định lý van Aubel về tam giác đưa ra những tính chất đẹp về các đường đồng quy trong tam giác.

Trong khuôn khổ luận văn này chúng tôi xin được trình bày đề tài: "Định lý van Aubel và ứng dụng trong việc giải một số bài toán hình học dành cho học sinh giỏi". Mục đích của luận văn là tìm hiểu định lý van Aubel và các ứng dụng của nó vào giải một số bài toán hình học.

Luận văn tập trung vào việc tìm hiểu các tính chất đẹp của định lý van Aubel cho tam giác, tứ giác và một số vận dụng của định lý này vào giải một số bài tập hình học hay và khó dành cho học sinh giỏi. Cụ thể, luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 3 chương.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị. Chương 1 hệ thống một số định cơ bản hay được vận dụng khi chứng minh các bài toán hình học và trình bày một số bài toán về chứng minh tính đồng quy các đường thẳng.

Chương 2. Định lý van Aubel. Trong chương này, chúng tôi phát biểu định lý van Aubel cho hai trường hợp tam giác và tứ giác cùng với ba cách chứng minh cho mỗi trường hợp. Sau đó chúng tôi trình bày một số tính chất và hệ quả của các định lý này.

Chương 3. Vận dụng định lý van Aubel vào giải bài tập. Chương 3 được giành để giải một số bài tập và kết quả nâng cao có vận dụng định lý van Aubel cho tam giác và tứ giác.

Luận văn này được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TS. Trịnh Thanh Hải. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo, Khoa Toán-Tin Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Nhân dịp này tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn bên tôi, cổ vũ, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2018

Người viết luận văn

Nguyễn Đình Huy

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

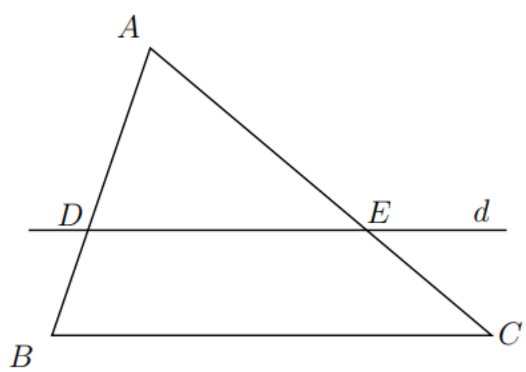
Chương 1 hệ thống một số định cơ bản hay được vận dụng khi chứng minh các bài toán hình học và trình bày một số bài toán về chứng minh tính đồng quy các đường thẳng.

1.1 Một số định lý hình học

Định lý 1.1.1 (Định lý Thales thuận, [1]). *Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

Với tam giác ABC, nếu có đường thẳng d song song với BC và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại hai điểm D, E thì:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ và } \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}.$$



Hình 1.1: Định lý Thales

Định lý 1.1.2 (Định lý Thales đảo, [1]). *Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.*

Với tam giác ABC, nếu có đường thẳng d cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại hai điểm D, E và

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \text{hay} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{hay} \quad \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

thì $DE \parallel BC$ hay $d \parallel BC$.

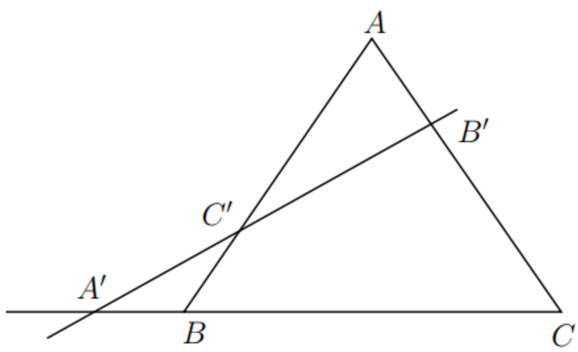
Hệ quả 1.1.1 ([1]). *Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.*

Với tam giác ABC, nếu có đường thẳng d song song với BC và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại hai điểm D, E thì

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Định lý 1.1.3 (Định lý Menelaus, [1]). *Cho tam giác ABC và ba điểm A', B', C' trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB sao cho: hoặc cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên phần kéo dài của ba cạnh, hoặc một trong ba điểm đó nằm trên phần kéo dài của một cạnh còn hai điểm kia nằm trên hai cạnh của tam giác. Điều kiện cần và đủ để A', B', C' thẳng hàng là ta có hệ thức*

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1. \tag{1.1}$$



Hình 1.2: Định lý Menelaus

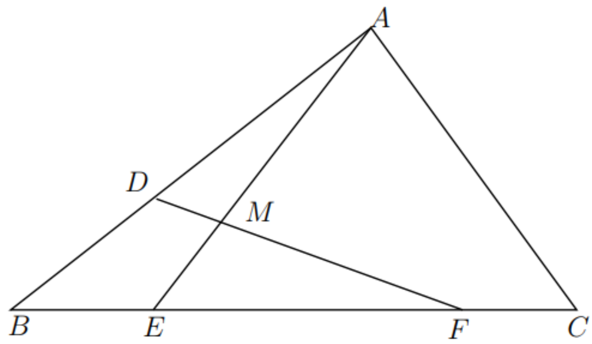
Bài toán 1.1.1. Trong tam giác ABC, lấy trên cạnh AB một điểm D, trên cạnh BC hai điểm E và F sao cho

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}, \frac{BE}{EC} = \frac{1}{3}, \frac{BF}{FC} = \frac{4}{1}.$$

Hỏi đường thẳng AE chia đoạn thẳng DF theo tỉ số nào?

Giải. Gọi điểm M là giao điểm của AE với DF. Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác BDF với cát tuyến AME, ta có

$$\frac{DM}{MF} \cdot \frac{FE}{EB} \cdot \frac{BA}{AD} = 1. \tag{1.2}$$



Hình 1.3: Áp dụng định lý Menelaus

Mà

$$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AD}{3} = \frac{DB}{2} = \frac{AB}{5} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{5}{3},$$
$$\frac{BE}{1} = \frac{EC}{3} = \frac{BC}{4} \Rightarrow EB = \frac{1}{4}BC,$$
$$\frac{BF}{4} = \frac{FC}{1} = \frac{BC}{5} \Rightarrow FB = \frac{4}{5}BC,$$

nên

$$\frac{FE}{EB} = \frac{FB - EB}{EB} = \frac{11}{5}.$$

Cho nên (1.2) trở thành

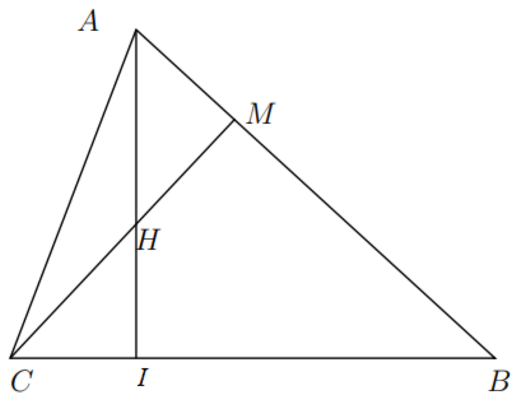
$$\frac{DM}{MF} \cdot \frac{11}{5} \cdot \frac{5}{3} = 1.$$

Vậy $\dfrac{DM}{MF} = \dfrac{3}{11}$. □

Bài toán 1.1.2. Trong một tam giác ABC, trực tâm H chia đôi đường cao CM. Chứng minh rằng $\cos C = \cos A \cos B$.

Giải. Xét tam giác CMB với cát tuyến AHI. Theo định lý Menelaus ta có

$$\frac{CH}{HM} \cdot \frac{MA}{AB} \cdot \frac{BI}{IC} = 1.$$



Hình 1.4: Trực tâm H là trung điểm đường cao CM

Hay

$$\frac{CH}{HM} \cdot \frac{MA}{AC} \cdot \frac{AC}{IC} \cdot \frac{BI}{AB} = 1. \tag{1.3}$$

Mà

$$\frac{CH}{HM} = 1, \frac{MA}{AC} = \cos A, \frac{AC}{IC} = (\cos C)^{-1}, \frac{BI}{AB} = \cos B.$$

Thay vào (1.3), ta có

$$\cos C = \cos A \cos B.$$

□

Định lý 1.1.4 (Định lý Ceva, [1]). *Cho tam giác ABC và ba đường thẳng AA', BB', CC' xuất phát từ các đỉnh của tam giác và cắt đường thẳng chứa cạnh đối diện tại A', B', C' sao cho: hoặc cả ba điểm A', B', C' đều nằm trên ba cạnh của tam giác hoặc một trong ba điểm đó nằm trên một cạnh của tam giác còn hai điểm kia nằm trên phần kéo dài của hai cạnh còn lại. Điều kiện cần và đủ để AA', BB', CC' đồng quy hoặc song song với nhau là ta có hệ thức:*

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1. \tag{1.4}$$